1. Uvažujme Markovův řetězec s maticí intenzit

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -9 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Určete matici pravděpodobností přechodu ve vnořeném řetězci. (1 bod)

   (b) Spočtěte stacionární rozdělení ve vnořeném řetězci. (1 bod)

   (c) Spočtěte stacionární rozdělení v původním řetězci. (1 bod)

2. Uvažujte továrnu s celkem třemi stroji a se třemi opraváři. Každý stroj pracuje nezávisle na ostatních strojích a na jejich případných opravách i na tom, jak dlouho již pracuje a to s průměrnou dobou do poruchy 1 hodina. Každý porouchaný stroj je ihned opravován opravářem s tím, že opravy jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 1/2 hodiny. Označme X_t počet porouchaných strojů v čase $t \geq 0$.

   (a) Sestavte matici intenzit přechodu řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$. (2 body)

   (b) Najděte stacionární rozdělení řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$ (pokud existuje). (2 body)

   (c) Předpokládejte, že na počátku směny jsou všechny stroje v pořádku. Spočtěte střední hodnotu doby, než se nějaký stroj porouchá. (1 bod)

3. Určitou radiovou stanici si naladí nový posluchač v průměru každou minutu, přičemž tyto události tvoří Poissonův proces, který je nezávislý na dobách poslechu stanice. Doby poslechu jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 1 hodina. Označme X_t počet posluchačů rozhlasové stanice v čase $t \geq 0$.

   (a) Sestavte matici intenzit přechodu řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$. (2 body)

   (b) Rozhodněte, zda existuje limitní rozdělení řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$ a určete jej, pokud existuje. (2 body)

   (c) Spočtěte střední počet posluchačů v ustáleném provozu. (2 body)